

# 《复变函数论》教学大纲

课程编码: 110830

课程名称: 复变函数论

学时/学分: 54/3

先修课程: 《数学分析》

适用专业: 数学与应用数学

开课教研室: 分析与方程教研室

## 一、课程性质与任务

1. 课程性质: 本课程是数学与应用数学专业的必修专业基础课

2. 课程任务: 通过本课程的教学, 使学生对复变函数的一些基本概念、基本理论、基本方法有较深刻的认识和理解并掌握, 培养学生应用这些概念与方法解决实际问题的基本技能, 加深对《数学分析》中基础理论的理解; 认识到高等数学对初等数学的指导作用; 认识到一些不同数学分支之间的内在联系与相互影响, 并对现代数学不同学科间的内在联系与相互渗透有一个初步的了解; 进一步锻炼学习者的能力, 培养和提高分析问题和解决问题的能力; 为学习有关专业和扩大数学知识面提供必要的数学基础。

## 二、课程教学基本要求

1. 复变函数是数学专业一门主要的专业必修课, 是数学分析的后续课程。它的理论和方法, 对于数学的其他学科, 对于物理、力学、工程技术中的一些问题, 有许多重要的应用。通过本课程的教学, 使学生掌握复变函数的基本理论和方法, 获得独立地分析和解决某些有关的理论和实际问题的能力, 从而为从事教学、科研及其他实际工作打好基础。本课程开设在第 5 学期, 总学时 54。

2. 本课程的成绩考核方式为闭卷考试。考试成绩由平时成绩和期终考试成绩组成, 期终成绩(闭卷考试)(70%) + 平时成绩(平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等)(30%)。成绩评定采用百分制, 60 分为及格。

## 三、课程教学内容

### 第一章 复数与复变函数

#### 1. 教学基本要求

进一步熟悉中学阶段有关复数及其运算的知识; 熟悉和掌握有关平面点集的概念以及定义在复平面上的函数及它的极限与连续性的概念; 应用复数知识解决初等数学中的有关几何代数问题。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

熟练掌握复数的模与辐角、复数的三种表示、复数的基本性质，掌握复数的乘幂与方根的求法，会用复数表示平面图形，会用复数解决一些简单的几何问题；理解平面点集的几个基本概念，理解区域与约当曲线的概念，了解约当定理，会区分单连通区域与多连通区域；充分理解复变函数、多值函数、反函数等概念，理解复变函数的几何表示，会求简单平面图形的变换象（或原象），理解复变函数的极限，掌握极限的等价刻划定理，理解复变函数的连续性及其等价刻划定理，熟悉有界闭集上连续函数的性质。了解复球面，理解无穷远点与扩充复平面。

## 3. 教学重点和难点

教学的重点是复数域、复平面、复数的模与辐角、复数的乘幂与方根、共轭复数、复数在几何上的应用举例及复变函数的概念、复变函数的极限与连续性；教学的难点是复平面上的点集：复平面上的点集的几个基本概念、区域与约当曲线及复变函数的概念、复变函数的极限与连续性。

## 4. 教学内容

### 第一节 复数

1. 复数域
2. 复平面
3. 复数的模与辐角
4. 复数的乘幂与方根
5. 共轭复数
6. 复数在几何上的应用举例

### 第二节 复平面上的点集

1. 平面的点集的几个基本概念
2. 区域与约当曲线

### 第三节 复变函数

1. 复变函数的概念
2. 复变函数的极限与连续性

### 第四节 复球面与无穷远点

1. 复球面
2. 扩充复平面上的几个概念

## 第二章 解析函数

### 1. 教学基本要求

理解复变函数的导数的概念，掌握解析函数的定义及其简单性质，熟练掌握解析函数的等价刻划定理特别是柯西-黎曼条件。熟练掌握指数函数的定义与主要性质，掌握三角函数

的定义与基本性质,掌握幂函数与指数函数的变换性质与单叶性区域,理解并逐步掌握通过限制幅角或割破平面的方法求根式函数和对数函数的单值解析分支,了解一般幂函数与一般指数函数,理解并掌握求具有多个支点的多值函数的支点从而使其能分出单值解析分支的方法,会由已知单值解析分支的初值计算终值,了解反三角函数与反双曲函数。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章的学习,使学生掌握解析函数的定义及其简单性质,解析函数的等价刻划定理特别是柯西-黎曼条件;指数函数的定义与主要性质;三角函数的定义与基本性质;幂函数与指数函数的变换性质与单叶性区域。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是复变函数的导数与微分,解析函数及其简单性质,柯西-黎曼条件,指数函数,三角函数,双曲函数,根式函数,对数函数,一般幂函数与一般指数函数,具有多个支点的多值函数,反三角函数与反双曲函数。教学难点是掌握幂函数与指数函数的变换性质与单叶性区域,理解并逐步掌握通过限制幅角或割破平面的方法求根式函数和对数函数的单值解析分支,了解一般幂函数与一般指数函数,理解并掌握求具有多个支点的多值函数的支点从而使其能分出单值解析分支的方法,会由已知单值解析分支的初值计算终值,了解反三角函数与反双曲函数。

## 4. 教学内容

### 第一节 解析函数的概念与柯西-黎曼方程

1. 复变函数的导数与微分
2. 解析函数及其简单性质
3. 柯西-黎曼方程

### 第二节 初等解析函数

1. 指数函数
2. 三角函数与双曲函数

### 第三节 初等多值函数

1. 根式函数
2. 对数函数
3. 一般幂函数与一般指数函数
4. 具有多个有限支点的情形
5. 反三角函数与反双曲函数

## 第三章 复变函数的积分

### 1. 教学基本要求

理解复变函数的积分的定义,掌握复积分的性质与计算方法。掌握柯西积分定理及

其等价形式和两种推广形式以及它们的应用,掌握不定积分特别是由变上限积分确定的单值解析函数,会用牛顿-莱布尼兹公式计算复定积分。熟练掌握柯西积分公式与高阶导数公式,掌握解析函数的平均值定理、无穷可微性以及它的第二个等价刻划定理,掌握柯西不等式、刘维尔定理、摩勒拉定理。掌握调和函数与共轭调和函数的概念,理解解析函数与调和函数的关系,掌握由解析函数的实部(或虚部)求虚部(或实部)的两种方法。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章的学习,使学生掌握复变函数的积分的定义,复积分的性质与计算方法,柯西积分定理及其等价形式和两种推广形式以及它们的应用,不定积分特别是由变上限积分确定的单值解析函数,会用牛顿-莱布尼兹公式计算复定积分,柯西积分公式与高阶导数公式,解析函数的平均值定理、无穷可微性以及它的第二个等价刻划定理,柯西不等式、刘维尔定理、摩勒拉定理调和函数与共轭调和函数的概念,由解析函数的实部(或虚部)求虚部(或实部)的两种方法。

## 3. 教学重点和难点

教学的重点是复变函数的积分的定义、性质与计算,柯西积分定理及其推广,不定积分,柯西积分公式或高阶导数公式,解析函数的无穷可微性,柯西不等式,刘维尔定理,摩勒拉定理,解析函数与调和函数的关系。难点是柯西积分定理及其等价形式和两种推广形式以及它们的应用,不定积分特别是由变上限积分确定的单值解析函数,会用牛顿-莱布尼兹公式计算复定积分,调和函数与共轭调和函数的概念,理解解析函数与调和函数的关系,掌握由解析函数的实部(或虚部)求虚部(或实部)的两种方法。

## 4. 教学内容

### 第一节 复积分的概念及其简单性质

1. 复变函数的积分的定义
2. 复积分的计算问题
3. 复变函数积分的基本性质

### 第二节 柯西积分定理

1. 柯西积分定理
2. 不定积分
3. 柯西积分定理推广
4. 柯西积分定理推广到复围线的情形

### 第三节 柯西积分公式及其推论

1. 柯西积分公式
2. 解析函数的无穷可微性
3. 柯西不等式与刘维尔定理

#### 4. 摩勒拉定理

### 第四节 解析函数与调和函数的关系

## 第四章 解析函数的幂级数表示法

### 1. 教学基本要求

理解复数项级数敛散性的定义，掌握其收敛性的两个刻划定理，掌握复级数的绝对收敛性及绝对收敛复级数的性质，掌握关于复变函数项级数的柯西一致收敛准则与优级数准则，熟悉复连续函数项级数的性质，了解复变函数项级数的内闭一致收敛性，熟练掌握关于解析函数项级数的维尔斯特拉斯定理。掌握阿贝尔定理，充分理解幂级数的敛散性，熟练掌握幂级数收敛半径的求法，掌握幂级数和函数的解析性。掌握泰勒定理，理解幂级数的和函数在收敛圆周上的情况，掌握一些初等函数的泰勒展开式，会用间接法把解析函数展开为幂级数。掌握解析函数零点的概念及具有零点的解析函数的表达式，掌握解析函数零点的孤立性与解析函数的唯一性定理，熟练掌握最大模原理及其推论。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章的学习，使学生掌握复数项级数的收敛性的两个刻划定理，复级数的绝对收敛性及绝对收敛复级数的性质解析函数的等价刻划定理及解析函数项级数的维尔斯特拉斯定理；熟练掌握幂级数收敛半径的求法，掌握幂级数和函数的解析性。掌握泰勒定理；掌握一些初等函数的泰勒展开式，会用间接法把解析函数展开为幂级数。掌握解析函数零点的概念及具有零点的解析函数的表达式，掌握解析函数零点的孤立性与解析函数的唯一性定理，熟练掌握最大模原理及其推论。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是复数项级数及其基本性质，一致收敛的复变函数项级数及其性质，解析函数项级数的维尔斯特拉斯定理，阿贝尔定理和幂级数的敛散性，幂级数收敛半径的求法，幂级数和函数的解析性，泰勒定理，幂级数的和函数在收敛圆周上的情况，一些初等函数的泰勒展开式，解析函数零点的孤立性，解析函数的唯一性定理，最大模原理。教学难点是解析函数项级数的维尔斯特拉斯定理，泰勒定理，幂级数的和函数在收敛圆周上的情况等。

### 4. 教学内容

#### 第一节 复级数的基本性质

1. 复数项级数
2. 一致收敛的复数项级数
3. 解析函数项级数

#### 第二节 幂级数

1. 幂级数的敛散性
2. 收敛半径的求法，柯西-阿达马公式

3. 幂级数和的解析性

### 第三节 解析函数的泰勒展式

1. 泰勒定理
2. 幂级数的和函数在其收敛圆上的状况
3. 一些初等函数的泰勒展式

### 第四节 解析函数零点的孤立性及唯一性定理

1. 解析函数零点的孤立性
2. 唯一性定理
3. 最大模原理

## 第五章 解析函数的洛朗展式与孤立奇点

### 1. 教学基本要求

了解双边幂级数的敛散性及其和函数的解析性，掌握罗朗定理，理解罗朗级数与泰勒级数的关系，会用间接法把解析函数在孤立奇点邻域内展成罗朗级数。掌握孤立奇点的三种类型及其判别法，掌握施瓦茨引理，了解关于本性奇点的维尔斯特拉斯定理和皮卡（大）定理。理解解析函数在无穷远点邻域内的性态，掌握无穷远点作为孤立奇点的分类及相应的判别法。掌握整函数的概念及其分类，了解亚纯函数的概念及其与有理函数的关系。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章的学习，使学生掌握罗朗定理，会用间接法把解析函数在孤立奇点邻域内展成罗朗级数；掌握孤立奇点的三种类型及其判别法，掌握施瓦茨引理。掌握整函数的概念及其分类。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是罗朗定理，用间接法把解析函数在孤立奇点邻域内展成罗朗级数；孤立奇点的三种类型及其判别法，施瓦茨引理，掌握整函数的概念及其分类。教学难点是间接法把解析函数在孤立奇点邻域内展成罗朗级数及孤立奇点的三种类型及其判别法。

### 第一节 解析函数的洛朗展式

1. 双边幂级数
2. 解析函数的洛朗展式
3. 洛朗级数与泰勒级数的关系
4. 解析函数在孤立奇点邻域内的洛朗展式

### 第二节 解析函数的孤立奇点

1. 孤立奇点的三种类型
2. 可去奇点
3. 施瓦茨引理

4. 极点
5. 本质奇点
6. 皮卡定理

### 第三节 解析函数在无穷远点的性质

### 第四节 整函数与亚纯函数的概念

1. 整函数
2. 亚纯函数

## 第六章 留数理论及其应用

### 1. 教学基本要求

掌握留数的定义与留数定理，熟练掌握留数的求法，掌握无穷远点的留数的定义及其求法。掌握用留数计算三角函数有理式在一个周期上的积分、有理函数的无穷限广义积分、有理函数与纯虚变量指数函数（或三角函数）乘积的无穷限广义积分的方法，了解积分路径上有奇点的积分的求法。掌握关于解析函数零点与极点个数的定理，掌握辐角原理及其应用，掌握儒歇定理及其应用。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、原理

通过本章的学习，使学生掌握留数的定义与留数定理，熟练掌握留数的求法，掌握无穷远点的留数的定义及其求法。掌握用留数计算三角函数有理式在一个周期上的积分、有理函数的无穷限广义积分、有理函数与纯虚变量指数函数（或三角函数）乘积的无穷限广义积分的方法，掌握关于解析函数零点与极点个数的定理，掌握辐角原理及其应用，掌握儒歇定理及其应用。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是留数的定义，留数定理，留数的求法，函数在无穷远点的留数，用留数计算实积分，对数留数，辐角原理，儒歇定理。教学难点是留数的求法，函数在无穷远点的留数，用留数计算实积分，辐角原理及其应用。

### 4. 教学内容

#### 第一节 留数

1. 留数的定义及留数定理
2. 留数的求法
3. 函数在无穷远点的留数

#### 第二节 用留数定理计算实积分

1. 计算  $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$  型积分
2. 计算  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  型积分

3. 计算  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx$  型积分

4. 计算积分路径上有奇点的积分

### 第三节 辐角原理及其应用

1. 对数留数
2. 辐角原理
3. 儒歇定理

## 四、学时分配表

章序	内容	课时	备注
一	复数与复变函数	6	
二	解析函数	8	
三	复变函数的积分	10	
四	解析函数的幂级数表示法	10	
五	解析函数的洛朗展式与孤立奇点	10	
六	留数理论及其应用	10	
合计		54	

## 五、主用教材及参考书

(一) 主用教材:

《复变函数论》主编: 钟玉泉 出版社: 高等教育出版社 出版时间: 2004 年。

(二) 参考书:

1. 《复变函数》主编: 余家荣 出版社: 高等教育出版社 出版时间: 2010 年。

2. 《复变函数教程》主编: 方企勤 出版社: 北京大学出版社 出版时间: 2009 年。

3. 《复变函数学习指导书》主编: 钟玉泉 出版社: 高等教育出版社 出版时间: 2010 年。

执笔: 赵守娟

审定: 张秦 梁桂珍